以本为本，合理探究，自然生成

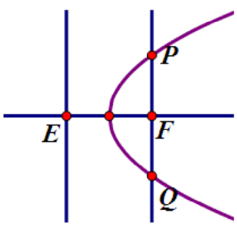
常州市教育科学研究院　徐德同

复习课是高三教学中非常重要的一种课型，它不仅可以帮助学生加深对旧知识的认识，梳理并形成系统的知识网络，而且可以在巩固双基的基础上培养学生提出问题、发现问题和解决问题的能力。2013 年 9 月笔者应江苏省教育学会之邀，在江苏教院附中为省内部分三星及四星高中的高三数学教师开设了一堂解析几何复习课（用时约 55 分钟），复习的内容是“抛物线”。现把课堂实录和对高三复习课的思考整理成文，与大家交流。

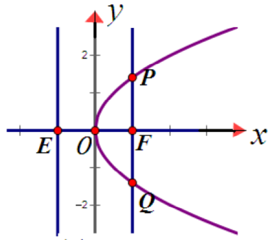
环节一：回归课本，设计问题，以问题为载体梳理知识框架

课前笔者根据苏教版 2012 年第三版第 52 页内容提出了下面的问题：

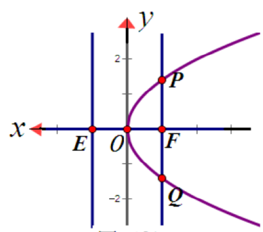
设抛物线的轴和它的准线交于点 E，过焦点垂直于轴的直线交抛物线于 P、Q 两点，如图（1）所示. 求证：$EP\perp EQ$.



图（1）



图（2）



图（3）

经过短暂的思考，笔者与学生进行了以下交流：

师：大家准备从哪个角度来解决问题，是几何角度（即几何综合证明）还是代数角度（即通过计算来证明）？

生 1：我准备从代数角度通过计算两直线斜率之积为 -1.

师：从代数角度是合适的，因为解析几何的基本思想是用代数方法来研究几何问题.

师：从代数角度首先要做什么工作？

生 1：建立平面直角坐标系.

师：你准备怎么建？

生 1：以抛物线的轴为 x 轴，以线段 EF 的中点为坐标原点建系. 如图（2）.

师:抛物线的方程是什么?对应的焦点坐标和准线方程呢?

生1:我设的方程是 $y^2=2px(p>0)$,焦点坐标是$(\frac{p}{2},0)$,准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$.

师:如果线段 FE 的方向是 x 轴的正方向呢?如图(3).

生1:那么方程就应该是 $y^2=-2px(p>0)$,焦点坐标是$(-\frac{p}{2},0)$,准线方程是 $x=\frac{p}{2}$.

师:你设的方程中 p 有什么几何意义?

生1:p 表示焦点 F 到准线的距离.

师:生1这样建系的方式是恰当的,这样建系我们就可以根据公式直接写出抛物线的标准方程,当然我们也可以以直线 EF 为 y 轴得到焦点在 y 轴上的标准方程.

师:还有同学设的方程和他不一样的吗?

生2:我按图(2)建的系,设的方程是 $y^2=mx(m>0)$.

师:生2的方程对应的 p 即焦点到准线的距离是$\frac{m}{2}$,所以焦点坐标是$(\frac{m}{4},0)$,准线方程是 $x=-\frac{m}{4}$. 如果我按图(3)建系设方程是 $y^2=mx$,此时应有 $m<0$,焦点坐标和准线方程又分别是什么呢?

生2:(略做思考)还是$(\frac{m}{4},0)$和 $x=-\frac{m}{4}$.

师:总结求焦点坐标和准线方程的关键,先“定位”即确定开口方向,再“定量”即确定 p,明确 p 的几何意义,p 即焦点到准线的距离,再由此写焦点坐标和准线方程.

师:现在我们设上述问题中焦点 F 到准线的距离为1,请大家思考并交流如何证明 $EP\perp EQ$?

给出问题:

设抛物线的轴和它的准线交于点 E,焦点 F 到准线的距离为1,过焦点 F 垂直于轴的直线交抛物线于 P、Q 两点,如图(1)所示. 求证:$EP\perp EQ$.

三位同学作交流发言:

生1:如图(2)建系. 因为抛物线焦点 F 到准线的距离为1,即 $p=1$,所以抛物线方程是 $y^2=2x$,通过联立方程组$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y^2=2x\end{cases}$求出点 P、Q 的坐标,计算得 $k_{EP}\cdot k_{EQ}=-1$,所以 $EP\perp EQ$.

生3:我直接写出了点 P、Q 的坐标,因为线段 PQ 是抛物线的通径,由通径长公式知 PQ 长度为 $2p$ 也就是2,然后计算 $k_{EP}\cdot k_{EQ}$.

生 4:我是通过计算焦半径 FP、FQ 发现 $FP=FQ=FE$,所以点 E、P、Q 一定在以 F 为圆心 FP 为直径的圆上,所以一定有 $EP\perp EQ$.

师:点评直线和抛物线交点求法、通径长公式和焦半径公式. 通过合理板书形成这一节的知识框架.

思考之一:高三复习课如何梳理基础知识

对于高三复习课,如何梳理基础知识是高三数学老师必须解决好的第一个问题,常规的做法有三种,一是先集中梳理,全面概况,由教师把所有的基础知识全部归纳总结呈现出来;二是采取问答形式进行,教师提问学生回答,通过提问的方式由学生说出来,相互补充形成知识框架;三是让学生集中完成一些填空练习,以统一的练习来代替归纳整理。这样做有利有弊,优点是课堂层次分明,先进行知识点的统一回顾再进行例题讲解、变式巩固、归纳小结等。缺点是略显单调死板,往往不能够立即吸引学生的注意力和兴趣。因为基础知识部分往往比较零碎零散,又都是学生学过的内容,缺少一定的挑战性,所以容易造成上课起始阶段学生学习的源动力不足,主动参与的积极性不高,课堂气氛沉闷等问题。

笔者这节课以课本内容为基础提出了一则问题。问题看似简单,通过教师适当的引导后就包容了很大的信息量,抛物线的基础知识都有涉及. 通过对问题的剖析、解决及合理设计板书来达成对这一节知识的梳理,化有形(集中梳理)为无形,化零(零散知识)为整。美国著名数学教育家波利亚曾说:“一个专心的认真备课的老师能够拿出一个有意义的但又不复杂的题目,去帮助学生挖掘问题的各个方面,使得通过这道题,就好像通过一道门户,把学生引入一个完整的理论领域”。以问题为载体梳理知识框架的好处在于即能达成系统梳理知识的目标,又能以问题为中心吸引学生积极参与其中,调动学生思维的积极性,改变课堂上被动接受的状态。实践证明在复习课的知识梳理环节中通过精心设计问题,再辅以教师适当的系列提问,就一定能够更深度的“抓住”学生的注意力,不断激发学生的学习动机。

环节二:合理探究,自然生成,培养提出问题意识

师:每一个问题都有它的“关键词”,请大家阅读并确定题中的“关键词”.

生 5:我认为“垂直于轴”的“垂直”是关键词.

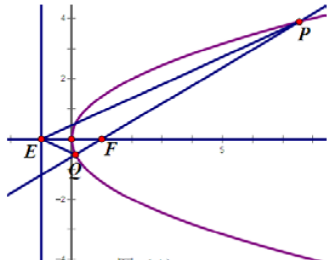
师:有道理,为什么要“垂直”呢? 如果直线 PQ 不垂直于抛物线的轴呢? 此时还一定有 $EP\perp EQ$ 吗?

生 5:应该没有.

师:你怎么知道的?

生 5:画个图一看便知道啊.

生 5 在画图纸上画了一条特殊直线,如图(4).



图（4）

师:画图观察能作为依据吗?凭什么说$\angle PEQ \neq 90°$呢?

生5:可以找一条特殊的直线求出$\angle PEQ$,它一定不等于$90°$.

很多人认同生5的观点,经过几分钟的计算就有了下面的交流:

生5:我取的直线PQ方程是$y=x-\frac{1}{2}$,由$\begin{cases} y=x-\frac{1}{2} \\ y^2=2x \end{cases}$

解出了点P、Q的坐$P=(\frac{3}{2}+\sqrt{2},1+\sqrt{2})$,$Q(\frac{3}{2}-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$由$E(-\frac{1}{2},0)$,求出$k_{EP}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$,$k_{EQ}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$,它们的积$k_{EP}\cdot k_{EQ}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$,不等于$-1$,所以不垂直.

师:还有找特殊直线的吗?

生6:我找的直线是$y=2(x-\frac{1}{2})$,求出的$P(\frac{3+\sqrt{5}}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$,$Q(\frac{3-\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$,$k_{EP}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}$,$k_{EQ}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}$,它们的积$k_{EP}\cdot k_{EQ}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{2(1-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}=-\frac{4}{5}$,也不等于$-1$.

师:两位同学通过取特殊直线并求得两直线的斜率之积不等于-1,因此垂直就不是必然了,他们所求的直线EP和直线EQ的斜率有没有联系呢?

引导学生对无理分式进行适当的化简:$k_{EP}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$k_{EQ}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,$k_{EP}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,$k_{EQ}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.很快可以发现两者互为相反数.

师:互为相反数说明直线EP和直线EQ什么样的位置关系?

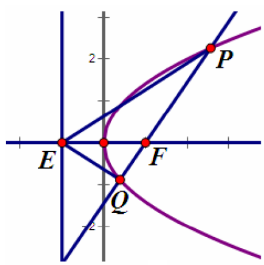
生:关于x轴对称.

师:是巧合还是必然?如果是必然,是什么样的必然呢?

学生很快就提出了下面的猜想:

猜想一:

设抛物线的轴和它的准线交于点E,焦点F到准线的距离为1,过焦点F不垂直于轴的直线交抛物线于P、Q两点,如图(5)所示.则$\angle PEF=\angle QEF$.



图（5）

师生一起完成对上述猜想的证明：

设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-\frac{1}{2})$，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-\frac{1}{2}) \\ y^2=2x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(k^2+2)x+\frac{k^2}{4}=0$，故 $x_1x_2=\frac{1}{4}$，且

$$k_{EP}+k_{EQ}=\frac{y_1}{x_1+\frac{1}{2}}+\frac{y_2}{x_2+\frac{1}{2}}=\frac{y_1(x_2+\frac{1}{2})+y_2(x_1+\frac{1}{2})}{(x_1+\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2})}=$$

$$\frac{k(x_1-\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2})+k(x_2-\frac{1}{2})(x_1+\frac{1}{2})}{(x_1+\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2})}=\frac{k(2x_1x_2-\frac{1}{2})}{(x_1+\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2})}=0,$$

所以 $\angle PEF=\angle QEF$.

师：刚才我们通过改变问题中的关键词得到了一个新发现，请大家再次读题，你觉得问题中还有那些词是“关键词”，针对这些“关键词”你有什么样的思考或质疑？

生7：“经过焦点 F”我觉得比较关键. 我的问题是如果直线不经过焦点 F 还有 $\angle PEF=\angle QEF$ 吗？

师：鼓励生8！给学生留足思考的时间.

几分钟之后就有了结果：

生7：$\angle PEF$ 与 $\angle QEF$ 不相等，我假设直线 PQ 方程是 $y=x-1$，

由 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=2x \end{cases}$ 得点 P、Q 的坐标 $P(2+\sqrt{3},1+\sqrt{3})$，$Q(2-\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ 因为 $E(-\frac{1}{2},0)$，

所以 $k_{EP}=\frac{1+\sqrt{3}}{\frac{5}{2}+\sqrt{3}}$，$k_{EQ}=\frac{1-\sqrt{3}}{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}$，和不等于0.

生8：老师(很兴奋)！我也取的 $y=x-1$，只要调整一下就可以！只要把点 E 的坐标改为 $(-1,0)$，那么 $k_{EP}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$k_{EQ}=\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\angle PEF$ 与 $\angle QEF$ 就相等了！

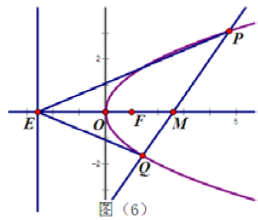
师：表扬生8！总结发现，调整之后直线 PQ 过点 $(1,0)$，点 E 的坐标是 $(-1,0)$，这时候 $\angle PEF$ 与 $\angle QEF$ 就相等了，是巧合还是必然？

沉默！(沉默了约2分钟，笔者很是担心是否有人能在沉默中爆发！)

生8：如果直线 PQ 与 x 轴的交点为 M，只要点 E 和点 M 到 y 轴的距离相等，就应该有 $\angle PEF=\angle QEF$！

形成猜想二：

设直线 $l_1:x=-t(t>0)$ 和 x 轴交于点 E，直线 $l_2:y=k(x-t)(t>0)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的交于 P、Q 两点，如图(6)所示. 则 $\angle PEM=\angle QEM$.



图(6)

学生很快独立完成了猜想的证明：设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=2px \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2t+2p)x+k^2t^2=0$，故 $x_1x_2=t^2$，且

$$k_{EP}+k_{EQ}=\frac{y_1}{x_1+t}+\frac{y_2}{x_2+t}=\frac{y_1(x_2+t)+y_2(x_1+t)}{(x_1+t)(x_2+t)}=$$

$$\frac{k(x_1-t)(x_2+t)+k(x_2-1)(x_1+t)}{(x_1+t)(x_2+t)}=\frac{k(2x_1x_2-2t^2)}{(x_1+t)(x_2+t)}=0$$，所以 $\angle PEM=\angle QEM$.

思考之二：高三复习课如何培养学生提出问题意识

在数学教学尤其是高三复习课的教学中如何克服学生只会埋头做题却提不出问题这一普遍现象？解决问题固然重要，但是在高三复习课教学中，更重要、更高级、更多的应该是问题解决之后的反思和质疑。只有以反思为核心的教学才能使学生更加深刻理解知识的内在实质和联系。教师在研读课本内容的基础上，选用、改编或设计一些有针对性、有内涵的问题，并引导学生对问题进行改变关键条件等不同角度的变化，从正反等几方面试着对一个问题进行反思处理，从而提出新的问题，对学生来说，真正做到了举一反三，触类旁通，起到事半功倍的效果。爱因斯坦曾说："提出一个问题往往比解决一个问题更为重要，因为解决一个问题也许只是一个数学上或实验上的技巧问题。而提出新的问题、新的可能性，从新的角度看旧问题，却需要创造性和想像力，这往往是获得认识突破的契机"。笔者以为高三复习课教学可以改变以"总结知识，例题讲解，强化训练"为核心的这种固有模式，有意识的转变为以"引导学生提出(发现)问题、引导学生如何思考问题、引导学生正确解决问题、引导学生及时反思问题"为核心的灵活课堂。毋庸置疑，一个教师如果能够有意识的、持之以恒的去引导学生反思质疑，就一定能提升学生发现问题和提出问题的能力，激发学生学习数学的兴趣和热情，而且十分有助于学生素质的提高和创新能力的养成。

课程标准提倡的理念中，有一条是"倡导积极主动、勇于探索的学习方式"。而反思质疑(提出问题)是探索的动力和源泉。古人亦云"学贵质疑，小疑则小进，大疑则大进"。可见反思质疑对学习的重要性，培养学生敢于提出问题的勇气和善于提出问题的能力，不仅是教师教学方法、教学技巧的问题，更是教学原则、教学观念的问题。迷信、盲从的思维定势，大大限制了学生创新思维能力的发展。教师应当在平时的教学实践过程中创造宽松和谐的教学和探讨的氛围，实现真实的绿色和谐课堂，让学生习惯于反思质疑。我们的学生不是缺乏反思质疑精神和品质，而是缺失了培育反思质疑品质

的土壤,这一点是我们每一个高三教师甚至所有中学老师要深刻思考的。

环节三:设计问题,针对训练,提高解决问题能力

例题:已知抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$,点 $E(-1,0)$,设不垂直于 x 轴的直线 l 与 C 交于不同的两点 P, Q(在 x 轴两侧),如图(6)所示. 若 x 轴是 $\angle PEQ$ 的角平分线,证明直线 l 过定点.

本题是由 2013 年高考陕西理科卷解析几何题改编而来,原题有两小问,第一小问求轨迹 C 方程即 $y^2=8x$,这是原题的第二小问,恰好与猜想二互为逆命题。答案一目了然,直线 l 过定点(1,0)。少数学生的想法和标准答案给出的思路一致(但限于时间没有完成),大家可以参考 2013 年陕西高考数学卷解答. 下面给出多数学生的想法:

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(t>0)$,设点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} y=k(x-t) \\ y^2=8x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2t+8)x+k^2t^2=0$,故 $x_1x_2=t^2$,且

$$k_{EP}+k_{EQ}=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=\frac{y_1(x_2+1)+y_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=$$

$$\frac{k(x_1-t)(x_2+1)+k(x_2-t)(x_1+1)}{(x_1+t)(x_2+t)}=\frac{k(2x_1x_2-2t)}{(x_1+t)(x_2+t)}=\frac{k(2t^2-2t)}{(x_1+t)(x_2+t)}$$,因为 x 轴是 $\angle PEQ$ 的角平分线,所以 $k_{EP}+k_{EQ}=0$,解得 $t=1$,是定值. 所以直线 l 过定点(1,0).

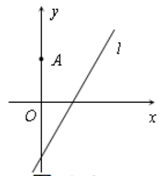
上述想法比标准答案提供的解法要简单,关键在于要能够判断直线过 x 轴上的一定点。

课堂小结:师生一起总结发现新命题、编制新命题的过程与思路,鼓励学生在问题解决之后要及时进行反思,大胆进行质疑,有时会有意想不到的发现和惊喜。

思考之三:高三复习课如何减负增效提高效率?

高三复习如何减负增效走出“题海之战”?答案是肯定的,以本为本,回归教材。研究吃透教材、深度开发教材这一宝藏是提高复习效率的必由之路。在复习教学绝不能把“以本为本”作为一句口号,要把反复钻研教材内容落实到日常教学的每一个环节中,在复习教学中无论什么样的复习资料都不能取代课本的“源头”地位,好水自从源头来。这么多年来市面上出现了众多的高三复习用书,其中不乏一些比较成熟的作品,造成了现在很多老师备课、上课很单一很机械,手捧一本复习指导用书从头到尾、从开始到结束,教师的备课基本等同于做一做复习资料上的题目,学生的学习基本等同于反复去做各种资料和试卷,基本脱离了教材。事实上,课本的本源性、本源作用在高考中越来越突显,这几年全国各地高考试题与教材包括例题、习题联系越来越紧密。2013 年高考江苏卷第一卷的 20 个题中有超过半数的题目源于教材或以教材为背景改编,均可在教材中找到题源。比如解答题中的第 17 题:

如图(7),在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(0,3)$,直线 $l:y=2x-4$. 设圆 C 的半径为1,圆心在 l 上.



图(7)

(1)若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上,过点 A 作圆 C 的切线,求切线的方程;

(2)若圆 C 上存在点 M,使 $MA=2MO$,求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.

苏教版必修2第100页习题第10题:已知点 $M(x,y)$ 与两个顶点 $O(0,0)$,$A(3,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$,那么点 M 的坐标应满足什么关系?画出满足条件的点 M 所形成的曲线。两者同音共律、如出一辙,这样的例子在近几年高考题中举不胜举。这种命题思路也给我们越来越明确的导向:高三复习必须回归教材,以本为本,研究开发教材是提高复习效率的必由之路。

参考文献:

1. 单墫主编.普通高课程标准实验教科书[M]必修2, 2012第3版.南京:江苏教育出版社,2013,100-101.

2. 单墫主编.普通高课程标准实验教科书[M]选修2-1, 2012第3版.南京:江苏教育出版社,2013,52-53.

3. 中华人民共和国教育部制订.普调高中数学课程标准(实验)[M].北京:人民教育出版社,2003.

本文发表于《教学月刊》2014年第5期