两个数列的公共项问题

常州市武进区教育局教研室　徐海洋

求两个正整数数列的公共项问题,特别是等差数列与其他数列的公共项问题,在高中数学中经常遇到。其本质是二元不定方程求解问题,其中还涉及到数的整除性、二项式定理以及数学归纳法,是学生学习的难点。本文对此作一些探讨。

一、常见的几种类型

1. 两个等差数列的公共项问题

为方便讨论,假设两个等差数列的公差均为正整数。

【例 1】数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=4n-1$,$b_n=3n+2$,它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$,求$\{c_n\}$的通项公式.

【解法 1】在等差数列$\{a_n\}$中寻找 c_k 与 c_{k+1}之间的关系。

设 $a_n=b_m=c_k$,则 $c_k=4n-1=3m+2$.

$\therefore a_{n+1}=4(n+1)-1=3m+2+4=3(m+2)\notin\{b_n\}$,

$a_{n+2}=4(n+2)-1=3m+2+8=3(m+3)+1\notin\{b_n\}$,

$a_{n+3}=4(n+3)-1=3m+2+12=3(m+4)+2\notin\{b_n\}$,(1)

$\therefore c_{k+1}=a_{n+3}$,$\therefore c_{k+1}-c_k=a_{n+3}-a_n=12$,

$\therefore \{c_n\}$构成公差为 12 的等差数列.

$\because c_1=a_3=11$,$\therefore c_n=11+12(n-1)=12n-1$.

【解法 2】利用数的整除性解不定方程。

设 $a=b_m$,则 $4n-1=3m+2$. $\therefore n=\dfrac{3(m+1)}{4}$ (2),

$\because$ 3 与 4 互质,$\therefore m+1$ 是 4 的倍数,设 $m+1=4k,k\in N^*$,

$\therefore m=4k-1$,$\therefore b_m=b_{4k-1}=3(4k-1)+2=12k-1$,$\therefore c_n=12n-1$.

【评注】1. 法 1 也可以在等差数列$\{b_n\}$中寻找 c_k 与 c_{k+1}之间的关系:事实上,由(1)式可得 $c_{k+1}=b_{m+4}$;法 2,也可由 $m=\dfrac{4n-3}{3}=n-1+\dfrac{n}{3}$得到 $n=3k$(也可由(2)式直接得到 $n=\dfrac{3(m+1)}{4}=3\cdot\dfrac{4k}{4}=3k$);

2. 公共项组成了公差为12的等差数列,其中 $12=3\times4$.

【变式】数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=4n-1$,$b_n=6n+3$,它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$,求$\{c_n\}$的通项公式。

【答案】$c_n=12n+3$.

【评注】公共项组成了公差为12的等差数列,其中12为3和4的最小公倍数。

【练习1】已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足 $a_n=3n-1$,$b_n=4n-1$,它们的公共项不改变原有的顺序组成的数列记为$\{c_n\}$,求数列$\{c_n\}$的通项公式。

【例2】若集合 $A=\{x\mid x=-2n-3,n\in N^*\}$,$B=\{y\mid y=-12n-5,n\in N^*\}$. 若等差数列$\{c_n\}$任一项 $c_n\in A\cap B$,c_1 是 $A\cap B$ 中的最大数,且 $-265<c_{10}<-125$,求$\{c_n\}$的通项公式。

【解析】对任意 $n\in N^*$,$\because a_n=-2n-3$,$b_n=-2(6n+1)-3$,$\therefore B\subset A$,$\therefore A\cap B$.

$\because c_1$ 是 $A\cap B$ 中的最大数,$\therefore c_1=b_1=-17$,

设等差数列$\{c_n\}$的公差为 d,则 $c_{10}=-17+9d$,

$\therefore -265<-17+9d<-125$,即 $-27\frac{5}{9}<d<-12$,

又$\{b_n\}$是一个以 -12 为公差的等差数列,$\therefore d=-12k(k\in N^*)$,$\therefore d=-24$,$\therefore c_n=7-24n$.

【练习2】已知数列$\{a_n\}$的 $a_n=2n+1$,设 $Q=\{x\mid x=-a_n+1,n\in N^*\}$,$R=\{x\mid x=-2a_n,n\in N^*\}$,等差数列$\{c_n\}$的任一项 $c_n\in Q\cap R$,其中 c_1 是 $Q\cap R$ 中的最小数,$110<c_{10}<115$,求$\{c_n\}$的通项公式。

从上面的例题及变式我们得到:如果两个等差数列存在公共项,那么它们的公共项仍然组成了一个等差数列,其公差为原公差的最小公倍数。

2. 等差数列与等比数列的公共项问题

【例3】数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=2^n$,$b_n=3n+2$,它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$,求$\{c_n\}$的通项公式。

【解法1】在等比数列$\{a_n\}$中寻找 c_k 与 c_{k+1}之间的关系。

设 $a_n=b_m=c_k$,则 $c_k=2^n=3m+2$.

$\therefore a_{n+1}=2\cdot2^n=2(3m+2)=3(2m+1)+1\notin\{b_n\}$,

$a_{n+2}=4\cdot2^n=4(3m+2)=3(4m+2)+2\in\{b_n\}$,(1)

$\therefore c_{k+1}=a_{n+2}$,$\therefore \frac{c_{k+1}}{c_k}=4$,$\therefore \{c_n\}$ 构成公比为4的等比数列. $\because c_1=a_3=8$,$\therefore c_n=2^{2n+1}$.

【解法 2】利用二项式定理解不定方程。

设 $a_n=b_m$,则 $2^n=3m+2$,故 2^n-2 须被 3 整除。

$\because 2^n-2=(3-1)^n-2=3[C_n^0 3^{n-1}+C_n^1 3^{n-2}\cdot(-1)^1+\cdots+C_n^{n-1}(-1)^{n-1}]+[(-1)^n-2]$,

故,当 n 为奇数时右式能被 3 整除,

又$\because m$ 为正整数,$\therefore n$ 为大于 1 的奇数,$\therefore c_n=2^{2n+1}$.

【评注】1. 当 n 为奇数时,2^n 被 3 除余 2 也可以用数学归纳法证明;

2. 法 1 如果在等差数列$\{b_n\}$中寻找 c_k 与 c_{k+1}之间的关系则比较麻烦:事实上,由(1)式可得 $c_{k+1}=b_{4m+2}=4b_m$;就转化为"子数列" 问题,可以得到 $c_n=b_{\frac{2^{2n+1}-2}{3}}$. 具体过程见下面的变式。

【变式】已知数列$\{b_n\}$的通项 $b_n=3n+2$,$\{b_n\}$中的部分项 $b_{k_1},b_{k_2},\cdots b_{k_n},\cdots$组成一个等比数列$\{c_n\}$,其中 $k_1=2,k_2=10$,求 k_n.

【解析】$\because b_{k_1}=b_2=8,b_{k_2}=b_{10}=32$,$\therefore \{c_n\}$的 $q=\dfrac{b_{k_2}}{b_{k_1}}=4$,$\therefore c_n=c_1q^{n-1}=8\times4^{n-1}=2^{2n+1}$,故 $b_{k_n}=2^{2n+1}$,又 $b_{k_n}=3k_n+2$,$\therefore 3k_n+2=2^{2n+1}$即 $k_n=\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$.

从上面的例题我们得到:如果等差数列和等比数列存在公共项,那么它们的公共项组成了一个等比数列。

【例 4】数列$\{a_n\}$为等比数列,$\{b_n\}$为等差数列,$a_n>0,b_n>0,a_1=b_1,a_2=b_2$,公差 $d>0$,公比 $q>1$,则 a_n 与 $b_n(n\geq3)$的大小关系是(　　)

A. $b_n>a_n$　　B. $b_n\geq a_n$　　C. $b_n<a_n$　　D. $b_n\leq a_n$

【解析】等比数列$\{b_n\}$可以看成关于 n 的指数函数,它是凹函数,等差数列$\{a_n\}$可以看成关于 n 一次函数. 由于 $a_1=b_1,a_2=b_2$,相当于图像有两个交点,且最后交点以后,b_n 图像在 a_n 上方,当 $n\geq3$,$b_n>a_n$,选 A。

【评注】若要严格论证,可利用二项式定理(或数学归纳法)证明。

由题意得,$a_n=a_1+(n-1)d,b_n=a_1\cdot q^{n-1}$. 由 $a_2=b_2$,$\therefore a_1+d=a_1\cdot q$,

$\therefore d=a_1(q-1)>0$,$\therefore b_n-a_n=a_1\cdot q^{n-1}-[a_1+(n-1)d]=a_1[q^{n-1}-1-(n-1)(q-1)]$,

又当 $n\geq3$ 时,$q^{n-1}=(1+q-1)^{n-1}=1+C_{n-1}^1(q-1)^1+C_{n-1}^2(q-1)^2+\cdots>1+(n-1)(q-1)$,

$\therefore q^{n-1}-1-(n-1)(q-1)>0$,$\therefore b_n-a_n>0$,选 A .

【练习 3】已知$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,其公比 $q\neq1$,$b_i>0(i=1,2,\cdots,$

n),若 $a_1=b_1, a_{11}=b_{11}$,则(　　)

A. $a_6>b_6$　　B. $a_6=b_6$　　C. $a_6<b_6$　　D. $a_6>b_6$ 或 $a_6<b_6$

【练习 4】若等差数列$\{a_n\}$与等比数列$\{b_n\}$的首项均为 1,且公差 $d>0$,公比 $q>1$,则集合$\{n \mid a_n=b_n\}(n\in N^*)$的元素的个数最多有____________个。

【练习 5】某厂 2013 年投资和利润逐月增加,投入资金逐月增长的百分率相同,利润逐月增加值相同. 已知 1 月份的投资额与利润值相等,12 月份投资额与利润值相等,则全年的总利润 ω 与总投资 N 大小关系(　　)

A. $\omega>N$　　B. $\omega<N$　　C. $\omega=N$　　D. 不确定

3. 等差数列与多项式数列的公共项问题

【例 5】(2013 南京二模)数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=n^2$,$b_n=7n+2$,它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$,求$\{c_n\}$的第 9 项。

【解析】在数列$\{a_n\}$中寻找 c_k 与 c_{k+1}之间的关系。

设 $a_n=b_m$,则 $n^2=7m+2$.

对 n 按照除以 7 的余数(即以 7 为模)分类:$k=0,1,2,\cdots$

$\therefore a_{7k+1}=(7k+1)^2=49k^2+14k+1=7(7k^2+2k)+1\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+2}=(7k+2)^2=49k^2+28k+4=7(7k^2+4k)+4\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+3}=(7k+3)^2=49k^2+42k+9=7(7k^2+6k+1)+2\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+4}=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+8k+2)+2\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+5}=(7k+5)^2=49k^2+70k+25=7(7k^2+10k+3)+4\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+6}=(7k+6)^2=49k^2+84k+36=7(7k^2+12k+5)+1\notin\{b_n\}$,

$a_{7k+7}=(7k+7)^2=49k^2+98k+49=7(7k^2+14k+7)\notin\{b_n\}$

$\therefore a_{7k+3}\in\{b_n\}, a_{7k+4}\in\{b_n\}$, $\therefore\{c_n\}$即为$\{3^2,4^2,10^2,11^2,17^2,18^2,\cdots\}$,

$\therefore c_9=31^2=961$.

【评注】1. $(7k+m)^2=49k^2+14km+m^2=7(7k^2+2km)+m^2$, $m=1,2,3,4,5,6,7$,也就是说 m^2 能够被 7 除余 2,$m^2=1,4,9,16,25,36,49$,只有 $m=3,4$;

2. 由上可得 $c_{2n-1}=a_{7n-4}=(7n-4)^2$,$c_{2n}=a_{7n-3}=(7n-3)^2$,故得到$\{c_n\}$的通项公式为 $c_n=\begin{cases}\left(\dfrac{7n-1}{2}\right)^2, n\text{ 为奇数}\\ \left(\dfrac{7n-6}{2}\right)^2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$,当然如果需要,我们也可以整合成

$$c_n=\left[\frac{7n}{2}-\frac{7+5\times(-1)^n}{4}\right]^2.$$

二、两个数列的公共项的应用

【例 6】(2011 上海理 22)已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=3n+6$，$b_n=2n+7(n\in N^*)$．将集合$\{x\mid x=a_n,n\in N^*\}\cup\{x\mid x=b_n,n\in N^*\}$中的元素从小到大依次排列，构成数列 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$

(1)写出 c_1,c_2,c_3,c_4；

(2)求证：在数列$\{c_n\}$中，但不在数列$\{b_n\}$中的项恰为 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$；

(3)求数列$\{c_n\}$的通项公式。

【解析】(1)$c_1=9,c_2=11,c_3=12,c_4=13$；

(2)由题意得，即证 $a_{2n}\notin\{b_n\}$，且 $a_{2n-1}\in\{b_n\}$．

①任意 $n\in N^*$，设 $a_{2n-1}=3(2n-1)+6=6n+3=b_k=2k+7$，

则 $k=3n-2$，即 $a_{2n-1}=b_{3n-2}$；

②假设 $a_{2n}=6n+6=b_k=2k+7\Leftrightarrow k=3n-\dfrac{1}{2}\in N^*$（矛盾），$\therefore a_{2n}\notin\{b_n\}$，

$\therefore$ 在数列$\{c_n\}$中．但不在数列$\{b_n\}$中的项恰为 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$．

(3) 先确定数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公共项 d_k 与 d_{k+1}，再寻找 d_k 与 d_{k+1}之间元素存在的规律。

$\because b_{3k-2}=2(3k-2)+7=6k+3=a_{2k-1}$，

$\therefore$ 设 $b_{3k-2}=a_{2k-1}=d_k$，则 $d_{k+1}=b_{3k+1}=a_{2k+1}=6k+9$，

$\because b_{3k-1}=6k+5,a_{2k}=6k+6,b_{3k}=6k+7$，$\therefore d_k<b_{3k-1}<a_{2k}<b_{3k}<d_{k+1}$.

$\therefore$ 当 $k=1$ 时，依次有 $b_1=a_1=c_1,b_2=c_2,a_2=c_3,b_3=c_4,\cdots\cdots$

$$\therefore C_n=\begin{cases}6k+3 & (n=4k-3)\\ 6k+5 & (n=4k-2)\\ 6k+6 & (n=4k-1)\\ 6k+7 & (n=4k)\end{cases},k\in N^*.$$

【例 7】(2011 江苏 20 改编)数列$\{a_n\}$中，若对任意的 $n\in N_+$，存在 $k\in N_+$，使得 $2a_{n+k}=a_n+a_{n+2k}$成立，则称数列为“L_k 型”数列。

若数列$\{a_n\}$既是“L_3”型数列，又是“L_4”型数列，证明：数列$\{a_n\}$是等差数列。

【解析】由题意可得：对任意的 $n\in N_+$，$\{a_n,a_{n+3},a_{n+6},\cdots\}$构成等差数列，

设 $a_{n+3}-a_n=3d_1$；则 $a_{n+12}=a_n+4\cdot 3d_1=a_n+12d_1$，

同理，$\{a_n,a_{n+4},a_{n+8},\cdots\}$构成等差数列，设 $a_{n+4}-a_n=4d_2$，

$\therefore a_{n+12}=a_n+3\cdot 4d_2=a_n+12d_2$，

$\therefore d_1 = d_2$,设其为 d .

下面证明对 $n \in N_+$,都有 $a_{n+1} - a_n = d$ 成立:

由 $a_{n+4} = a_n + 4d_2 = a_n + 4d, a_{n+4} = a_{n+1} + 3d_1 = a_{n+1} + 3d$,则 $a_{n+1} - a_n = d$.

故数列$\{a_n\}$是等差数列.

【评注】1. 利用$\{a_n, a_{n+3}, a_{n+6}, \cdots\}$与$\{a_n, a_{n+4}, a_{n+8}, \cdots\}$的公共项寻找其公差之间的关系;

2. 从本题的证明来看,命题可引申为:若数列$\{a_n\}$既是"L_1"型数列,又是"L_k"型数列,如果$(i,k)=1$ 即互质,就可推出数列$\{a_n\}$是等差数列。

【练习 6】(江苏省苏中三市 2012 届高三第一次调研测试 20)设数列$\{a_n\}$的各项均为正数.若对任意的 $n \in N_+$,存在 $k \in N_+$,使得 ${a_{n+k}}^2 = a_n \cdot a_{n+2k}$成立,则称数列为"$J_k$型"数列.若数列$\{a_n\}$既是"$J_3$"型数列,又是"$J_4$"型数列,证明:数列$\{a_n\}$是等比数列。

【练习答案】

1.**【解析】**令 $3n-1=4m-1$,所以 $n=\dfrac{4}{3}m$,令 $m=3k, k \in Z$,则 $c_k = b_m = 12k-1$,数列$\{c_n\}$的通项公式 $c_n = 12n-1$.

2.**【解析】**$\because Q=\{x \mid x=2n+2, n \in N^*\}, R=\{x \mid x=4n+2, n \in N^*\}$. $\therefore Q \cap R = R$.

又$\because c_n \in Q \cap R$,其中 c_1 是 $Q \cap R$ 中的最小数,

$\therefore c_1 = 6$, $\therefore c_{10} = 4m+6, m \in N^*$ ($\{c_n\}$的公差是 4 的倍数!),

又$\because 110 < c_{10} < 115$ $\therefore \begin{cases} 110 < 4m+6 < 115 \\ m \in N^* \end{cases}$,解得 $m=27$, $\therefore c_{10} = 114$.

设等差数列$\{c_n\}$的公差为 d,则 $d = \dfrac{c_{10} - c_1}{10-1} = \dfrac{114-6}{9} = 12$,

$\therefore c_n = 6 + (n+1) \cdot 12 = 12n-6$, $\therefore$ $\{c_n\}$的通项公式为 $c_n = 12n-6$.

3.**【解析】**$\because$ 数列$\{a_n\}$是等差数列,数列$\{b_n\}$是等比数列,$a_1 = b_1, a_{11} = b_{11}$,

$\therefore a_1 + a_{11} = b_1 + b_{11}$, $\therefore 2a_6 = b_1 + b_{11} \geq 2\sqrt{b_1 b_{11}} = 2b_6$,又 $q \neq 1$, $\therefore b_1 \neq b_{11}$, $\therefore a_6 > b_6$,故选 A.

4.**【解析】**因为 $a_n = b_n$,所以 $1 + dn = q^{n-1}$,由函数 $y = 1 + dx(d>0)$ 与 $y = q^{x-1}(q>1)$的图像至多有两个交点得方程 $1 + dn = q^{n-1}$的解至多有两个。

5.**【解析】**投入资金逐月值构成等比数列$\{b_n\}$,利润逐月值构成等差数列$\{a_n\}$,等比数列$\{b_n\}$可以看成关于 n 的指数式函数,它是凹函数,等差数列$\{a_n\}$可以看成关于 n 一次式函数.由于 $a_1 = b_1, a_{12} = b_{12}$,相当于图像有两个交点,且两交点间的 b_n 图像在 a_n 下方,全年的总利润 $\omega = a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}$比总投资 $N = b_1 + b_2 + \cdots + b_{12}$大.选(A)。

6.**【解析】**证明:由题意可得:对任意的 $n \in N_+$, $\{a_n, a_{n+3}, a_{n+6}, \cdots\}$构成等比数列,

设$\frac{a_{n+3}}{a_n}=q_1{}^3$;同理,$\{a_n,a_{n+4},a_{n+8},\cdots\}$构成等比数列,设$\frac{a_{n+4}}{a_n}=q_2{}^4$,

由 $a_n>0$,则 $q_1>0,q_2>0$,则 $a_{n+12}=a_n\cdot(q_1{}^3)^4=a_n\cdot q_1{}^{12}$,

同理 $a_{n+12}=a_n\cdot(q_2{}^4)^3=a_n\cdot q_2{}^{12}$, $\therefore q_1=q_2$,设其为 q .

下面证明对 $n\in N_+$,都有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 成立:

由 $a_{n+4}=a_n\cdot q_2{}^4=a_n\cdot q^4,a_{n+4}=a_{n+1}\cdot q_1{}^3=a_{n+1}\cdot q^3$,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,

故数列$\{a_n\}$是等比数列。

本文发表于《教学考试》2014 年第 3 期